

# Dodatok: Dôkazy ekvivalentných podmienok pre Riemannovu hypotézu (revidované)

Ing. Robert Polák  
robopol@gmail.com  
<https://robopol.sk>

May 21, 2026

## Abstract

Tento dodatok dokumentuje dve komplementárne nerovnosti použité v konsolidovanom článku:

1. pre primoriály  $n = \prod_{i \leq k} p_i$  platí  $\log n = \theta(p_k) < p_k$ ;
2. pre najmenší hypotetický proti-príklad Robinovej nerovnosti  $N$  platí  $p_k = P(N) < \log N$ .

Prezentácia je samostatná a ponecháva iba kalibračný  $j_{\min} = 2$  výpočet pre delta-korigovaný beta obal.

**Kľúčové slová:** Riemannova hypotéza; Robinova nerovnosť; Chebysheva funkcia; najmenší proti-príklad; delta-korigovaný obal.

## 1 Úvod

Opakujúcou sa zložkou hlavného textu je porovnanie medzi najväčším prvočíselným faktorom  $p_k$  čísla  $n$  a  $\log n$ . Pre primoriály klasické explicitné odhady Chebyshevovej funkcie dávajú

$$\log n = \theta(p_k) < p_k.$$

V dôkaze Robinovej nerovnosti však nepotrebujeme dokazovať opačnú nerovnosť pre každú kandidátsku triedu zvlášť. Stačí ju dokázať pre najmenší hypotetický proti-príklad  $N$ . Práve pre tento objekt dá minimalita spolu s konečnou kontrolou okraja pri Robinovej hranici priamy mostík

$$p_k = P(N) < \log N.$$

Na konci dodatku ponechávame iba  $j_{\min} = 2$  kalibráciu pre delta-korigovaný beta obal; nejde o samostatný dôkaz mostíka pre všetky kandidátske profily.

## 2 Dôkaz 1: Pre $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p_k$ platí $\log(n) < p_k$

**Tvrdenie.** Nech  $n$  je súčin prvých  $k$  prvočísel:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k,$$

kde  $p_k$  je  $k$ -té prvočíslo. Potom platí

$$\log(n) < p_k.$$

### Dôkaz.

1. **Vyjadrenie  $\log(n)$  ako súčet.** Využitím vlastnosti logaritmu pre súčin:

$$\log(n) = \log(p_1) + \log(p_2) + \cdots + \log(p_k).$$

2. **Definovanie Chebyshevovej funkcie  $\theta(x)$ .** Chebyshevova funkcia je definovaná ako

$$\theta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \log p.$$

Pre  $x = p_k$ :

$$\theta(p_k) = \sum_{i=1}^k \log p_i.$$

3. **Uplatnenie explicitnej Chebyshevovej hranice.** Klasické explicitné odhady pre  $\theta(x)$  v rozsahu používanom v tejto práci dávajú

$$\theta(x) < x.$$

Preto pre  $x = p_k$ :

$$\theta(p_k) < p_k.$$

4. **Záver nerovnosti.** Teda

$$\log(n) < p_k.$$

### Rozpísané kroky.

1. **Súčtová reprezentácia:**

$$\log n = \sum_{i \leq k} \log p_i$$

podľa pravidla logaritmu súčinu.

2. **Chebyshevova funkcia:**

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad \log n = \theta(p_k).$$

3. **Klasická hranica:** Klasické explicitné odhady pre  $\theta(x)$  v línii Chebyshev–Rosser–Schoenfeld–Dusart dávajú  $\theta(x) < x$  v potrebnom rozsahu, preto  $\log n < p_k$ .
4. **Poznámka:** Ostrejšie explicitné hranice sú k dispozícii, ale tu nie sú potrebné; striktná nerovnosť postačuje.

## 3 Dôkaz 2: Najmenší Robinov proti-príklad spĺňa $p_k < \log N$

Definujme

$$G(n) := \frac{\sigma(n)}{n \log \log n}.$$

Predpokladajme sporom, že Robinova nerovnosť zlyhá, a nech  $N > 5040$  je najmenší proti-príklad:

$$G(N) \geq e^\gamma, \quad G(m) < e^\gamma \quad (5040 < m < N).$$

Nech

$$p_k = P(N)$$

je najväčší prvočíselný deliteľ  $N$ . Nech  $a \geq 1$  je exponent, s ktorým sa  $p_k$  vyskytuje v rozklade  $N$ . Položme

$$M := \frac{N}{p_k}.$$

Pred samotným dôkazom si rozložme, čo treba ukázať. Číslo  $M$  vznikne z  $N$  odstránením jedného faktora  $p_k$ . Ak by platilo  $p_k \geq \log N$ , chceme ukázať, že tento prechod z  $M$  na  $N$  v skutočnosti zmenší normalizovaný Robinov pomer:

$$G(N) < G(M).$$

To by bol spor, lebo  $N$  sme zvolili ako prvý možný proti-príklad nad 5040, zatiaľ čo  $M < N$ . Dôkaz preto sleduje dva efekty naraz: pridaný faktor  $p_k$  vie zvýšiť  $\sigma(n)/n$  iba o malý násobok, ale súčasne zväčší menovateľ  $\log \log n$ . Predpoklad  $p_k \geq \log N$  presne zabezpečí, že druhý efekt preváži.

**Lema 1** (Mostík pre najmenší proti-príklad). *Ak  $M > 5040$ , potom*

$$p_k < \log N.$$

*Proof.* Predpokladajme opačne, že

$$p_k \geq \log N.$$

Tu slovo “minimalita” znamená iba toto:  $N$  je prvé číslo väčšie než 5040, ktoré by Robinovu nerovnosť porušilo. Každé číslo  $m$  s  $5040 < m < N$  ju teda neporušuje. Keďže  $M < N$  a  $M > 5040$ , dostávame

$$G(M) < e^\gamma.$$

Porovnajme teraz  $G(N)$  a  $G(M)$ . Intuícia je jednoduchá: prechod z  $M$  na  $N = Mp_k$  síce zväčší podiel  $\sigma(n)/n$ , ale pri veľkom  $p_k$  len veľmi málo; zároveň však zväčší menovateľ  $\log \log n$ . Ak  $p_k \geq \log N$ , druhý efekt je silnejší.

Najprv odhadneme zmenu v čitateli  $G$ , teda v podiele  $\sigma(n)/n$ . Zapišme

$$N = p_k^a u, \quad p_k \nmid u.$$

Potom

$$M = \frac{N}{p_k} = p_k^{a-1} u.$$

Funkcia  $\sigma$  je multiplikatívna na nesúdeliteľných faktoroch, preto

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \frac{\sigma(p_k^a)}{p_k^a} \frac{\sigma(u)}{u}, \quad \frac{\sigma(M)}{M} = \frac{\sigma(p_k^{a-1})}{p_k^{a-1}} \frac{\sigma(u)}{u}.$$

V pomere sa teda faktor  $\sigma(u)/u$  vykrátí:

$$\frac{\sigma(N)/N}{\sigma(M)/M} = \frac{\sigma(p_k^a)/p_k^a}{\sigma(p_k^{a-1})/p_k^{a-1}}.$$

Pre prvočíslo  $p$  platí

$$\frac{\sigma(p^a)}{p^a} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^a} = \frac{1 - p^{-(a+1)}}{1 - p^{-1}},$$

lebo delitele  $p^a$  sú  $1, p, p^2, \dots, p^a$  a posledný tvar je konečný geometrický rad. Preto pre prvočíselný faktor  $p_k$  dostávame

$$\frac{\sigma(p_k^a)/p_k^a}{\sigma(p_k^{a-1})/p_k^{a-1}} = \frac{1 - p_k^{-(a+1)}}{1 - p_k^{-a}} \leq 1 + \frac{1}{p_k}.$$

Poslednú nerovnosť overíme bez preskoku. Položme  $t = 1/p_k$ . Potrebujeme

$$\frac{1 - t^{a+1}}{1 - t^a} \leq 1 + t.$$

Keďže  $0 < t < 1$ , máme  $1 - t^a > 0$ , takže môžeme násobiť kladným menovateľom. Nerovnosť je ekvivalentná s

$$1 - t^{a+1} \leq (1 + t)(1 - t^a).$$

Rozdiel pravej a ľavej strany je

$$(1 + t)(1 - t^a) - (1 - t^{a+1}) = t - t^a \geq 0.$$

Teda hranica naozaj platí. Preto

$$\frac{\sigma(N)/N}{\sigma(M)/M} \leq 1 + \frac{1}{p_k}.$$

Toto znamená: pridaním jedného faktora  $p_k$  môže  $\sigma(n)/n$  narásť najviac o relatívny faktor  $1 + 1/p_k$ .

Teraz započítame menovateľ  $\log \log n$ . Z definície  $G$  najprv priamo dostávame

$$\frac{G(N)}{G(M)} = \frac{\frac{\sigma(N)}{N \log \log N}}{\frac{\sigma(M)}{M \log \log M}}.$$

Tento podiel rozdelíme na časť patriacu k  $\sigma(n)/n$  a na časť patriacu k  $\log \log n$ :

$$\frac{G(N)}{G(M)} = \frac{\sigma(N)/N}{\sigma(M)/M} \cdot \frac{\log \log M}{\log \log N}.$$

Prvý faktor meria, o koľko môže narásť  $\sigma(n)/n$  po pridaní faktora  $p_k$ . Druhý faktor je menší než 1, lebo  $M < N$ , teda  $\log \log M < \log \log N$ . Spojením s predchádzajúcim odhadom pre  $\sigma(n)/n$  dostávame

$$\frac{G(N)}{G(M)} \leq \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) \frac{\log \log M}{\log \log N}.$$

Od tejto chvíle teda stačí ukázať, že pokles v druhom faktore je väčší než možný nárast  $1 + 1/p_k$ . Teraz tento druhý faktor prepíšeme iba pomocou  $\log N$  a  $\log p_k$ . Položme

$$L := \log N, \quad s := \log p_k.$$

Keďže  $M = N/p_k$ , po zlogaritmovaní máme

$$\log M = \log N - \log p_k = L - s.$$

Preto

$$\log \log M = \log(L - s), \quad \log \log N = \log L,$$

a teda presne

$$\frac{\log \log M}{\log \log N} = \frac{\log(L - s)}{\log L}.$$

Vnútorňý predpoklad sporu je

$$p_k \geq \log N.$$

Keďže  $L = \log N$ , znamená to

$$p_k \geq L.$$

Po zlogaritmovaní dostávame

$$s = \log p_k \geq \log L.$$

Teda ak by  $p_k$  bolo aspoň také veľké ako  $\log N$ , odstránením faktora  $p_k$  by sa hodnota  $\log N$  zmenšila aspoň o  $\log L$ . Keďže  $M = N/p_k > 5040$ , máme  $p_k < N$ , a teda  $0 < s/L < 1$ . Nasledujúca logaritmická úprava je preto legitímna.

Odhadneme teraz pokles faktora  $\log \log$ . Použijeme štandardnú nerovnosť

$$\log(1 - x) \leq -x \quad (0 < x < 1).$$

V našom prípade bude

$$x = \frac{s}{L}.$$

Podmienka  $0 < x < 1$  je splnená, lebo vyššie sme ukázali  $0 < s/L < 1$ . Najprv prepíšeme argument logaritmu:

$$L - s = L \left(1 - \frac{s}{L}\right).$$

Preto z pravidla  $\log(ab) = \log a + \log b$  dostávame

$$\log(L - s) = \log L + \log \left(1 - \frac{s}{L}\right)$$

Teraz použijeme  $\log(1 - x) \leq -x$  s  $x = s/L$ :

$$\log \left(1 - \frac{s}{L}\right) \leq -\frac{s}{L}.$$

Teda

$$\log(L - s) \leq \log L - \frac{s}{L}.$$

Keďže  $N > 5040$ , máme  $L = \log N > 1$ , a preto  $\log L > 0$ . Po vydelení kladným číslom  $\log L$  dostávame

$$\frac{\log \log M}{\log \log N} = \frac{\log(L - s)}{\log L} \leq 1 - \frac{s}{L \log L}.$$

Toto je kvantitatívny pokles druhého faktora v pomere  $G(N)/G(M)$ . Takže celý pomer  $G(N)/G(M)$  má horný odhad

$$\frac{G(N)}{G(M)} \leq \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{s}{L \log L}\right).$$

Zostáva ukázať, že pravá strana je menšia než 1. Označme

$$A := \frac{s}{L \log L}.$$

Potrebuje

$$\left(1 + \frac{1}{p_k}\right) (1 - A) < 1.$$

Táto podmienka už nie je nová myšlienka, iba algebra. Naozaj,

$$\left(1 + \frac{1}{p_k}\right) (1 - A) < 1 \iff \frac{1}{p_k} < A \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) \iff A > \frac{1}{p_k + 1}.$$

Po dosadení  $A = s/(L \log L)$  je to ekvivalentné nerovnosti

$$s(p_k + 1) > L \log L.$$

Táto posledná nerovnosť už priamo vyplýva z  $p_k \geq L$  a  $s = \log p_k \geq \log L$ . Prvý krok používa  $s \geq \log L$ , druhý ostrý krok používa  $p_k + 1 > L$ :

$$s(p_k + 1) \geq (\log L)(p_k + 1) > (\log L)L = L \log L.$$

Preto

$$\frac{G(N)}{G(M)} < 1,$$

čiže  $G(N) < G(M) < e^\gamma$ . To odporuje výberu  $N$ , pretože  $N$  bolo vybrané ako proti-príklad a teda malo spĺňať  $G(N) \geq e^\gamma$ . Musí teda platiť  $p_k < \log N$ .  $\square$

**Okraj pri hranici 5040.** Minimalitný krok používa iba hodnoty  $m > 5040$ , preto je v leme explicitne uvedená podmienka  $M > 5040$ . Zostávajúci okraj  $M \leq 5040$  je konečný a viazaný na známu hranicu Robinových výnimiek. Pre pevné  $M$  platí

$$G(Mq) \leq \frac{\sigma(M)}{M} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \frac{1}{\log \log(Mq)},$$

a pravá strana je pre rastúce  $q$  klesajúca. Prípustné tu znamená, že  $q$  je prvočíslo,  $q \geq P(M)$ ,  $Mq > 5040$  a  $q \geq \log(Mq)$ , takže  $q$  môže byť najväčším prvočíselným deliteľom  $P(N)$  v okrajovom prípade  $N = Mq$ . Stačí teda skontrolovať prvé prípustné prvočíslo  $q$  pre každé  $1 \leq M \leq 5040$ . Ide o doslovnú konečnú kontrolu celých čísel  $1 \leq M \leq 5040$ ; monotónnosť vyššie potom pokrýva všetky väčšie prípustné prvočísla. Pri tejto kontrole nevzniká proti-príklad; najväčšia hodnota je pri  $M = 5040$ ,  $q = 11$ ,  $N = 55440$ :

$$G(55440) \approx 1.75125 < e^\gamma \approx 1.78107.$$

Tento konečný okraj je oddelený od asymptotickej lemy vyššie.

**Dôsledok pre hlavnú prácu.** Ak finálny Mertensov krok dá pre najmenší proti-príklad  $N$  odhad

$$\frac{\sigma(N)}{N} \leq e^\gamma \log p_k,$$

potom Lema 1 spolu s konečnou kontrolou okraja vyššie dáva

$$e^\gamma \log p_k < e^\gamma \log \log N,$$

a teda

$$\frac{\sigma(N)}{N} < e^\gamma \log \log N,$$

čo je spor. Preto kritický mostík  $p_k < \log N$  v hlavnom dôkaze nemusí byť dokazovaný pre každú kandidátsku triedu zvlášť; stačí ho mať pre najmenší hypotetický proti-príklad.

## 4 Kalibrácia profilu $j_{\min} = 2$ pre delta-korigovaný obal

Opravený numerický obal cez posledné prvočíslo má tvar

$$\beta_k < (e^\gamma + \Delta_0) \log p_k, \quad \varepsilon_0 := \frac{\Delta_0}{e^\gamma} \approx 0.005558981456720.$$

Na prevod tohto beta obalu do ostrého cieľa

$$\beta_k < e^\gamma \log \log n$$

samotný mostík  $p_k < \log n$  nestačí. Postačujúci silnejší mostík je

$$\log n \geq p_k^{1+\varepsilon_0}.$$

Potom totiž  $\log \log n \geq (1 + \varepsilon_0) \log p_k$ , a teda

$$e^\gamma \log \log n \geq (e^\gamma + \Delta_0) \log p_k.$$

Pre kalibračný profil s minimálnym exponentom  $j_{\min} = 2$  na celom prvočíselnom nosiči

$$n_2 := \prod_{p \leq p_k} p^2$$

platí

$$\log n_2 = 2 \sum_{p \leq p_k} \log p = 2\theta(p_k).$$

Pre tento kalibračný profil je prahová podmienka na pohltenie delta-korekcie

$$2\theta(p_k) \geq p_k^{1+\varepsilon_0}.$$

Ekvivalentne,

$$\log \log n_2 = \log(2\theta(p_k)) \geq (1 + \varepsilon_0) \log p_k.$$

Po vynásobení  $e^\gamma$  dostávame

$$e^\gamma \log \log n_2 \geq (e^\gamma + \Delta_0) \log p_k.$$

Toto je rezerva, ktorú  $j_{\min} = 2$  benchmark dodáva voči delta-korigovanému beta obalu. Výpočet je iba kalibrácia prahu pre tento benchmarkový profil, nie štrukturálne tvrdenie o rozložení exponentov Robinovho kandidáta. Samotný mostík  $p_k < \log N$  pre najmenší hypotetický proti-príklad zabezpečuje Lema 1 spolu s konečnou kontrolou okraja pri 5040.

## Referencie

- [1] P. L. Chebyshev, práce o teorii prvočísel a funkcích  $\theta(x)$  a  $\psi(x)$ .
- [2] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, Sharper bounds for the Chebyshev functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$ , Math. Comp. 29 (1975), 243–269.
- [3] P. Dusart, The  $k$ th prime is greater than  $k(\ln k + \ln \ln k - 1)$ , Math. Comp. (1999).