

Opravený stav Robinovho–MVDC programu

Nahradenie predchádzajúcej Robinovej–Mertensovej dôkazovej vetvy a konsolidovaného rukopisu

Ing. Robert Polak
robopol@gmail.com
<https://robopol.sk>

1. júna 2026

Abstrakt

Tento rukopis je opravenou stavovou verziou Robinovho–MVDC programu. Nahrádza predchádzajúcu Robinovu–Mertensovú kompenzačnú vetvu a predchádzajúci konsolidovaný rukopis ako dôkazové texty. Nie je prezentovaný ako hotový dôkaz Robinovej nerovnosti ani Riemannovej hypotézy.

Logaritmickej mostík, teda krok dávajúci $P(N) < \log N$ pre najmenší hypotetický Robinov protipríklad N , kde $P(N)$ označuje najväčší prvočíselný deliteľ N , ostáva samostatným pomocným výsledkom. Stiahnutou časťou je predchádzajúci Mertensov kompenzačný argument založený na abstraktnom J_1 -chvoste v zníženej $B(n)$ -obálke. Tento argument necertifikoval, že znížený súčin ostáva hornou obálkou pre $\sigma(n)/n$.

Opravený stav sa redukuje na dve aktívne analytické línie. Prvá je línia cez podpísané Chebyshevovo/MVDC centrum, ktorá zachováva kompenzáciu v beta chybe, ale vyžaduje jednostrannú vetu pre podpísaný vážený priemer $t - \theta(t)$. Druhá je prvomomentová recipročná línia, ktorá sa vyhýba oscilácii Chebyshevovej funkcie, ale vyžaduje ostrejší lokálny alebo kumulatívny odhad pre blokový súčet $\sum_{Y < p \leq x} 1/(p-1)$, než dávajú aktuálne známe endpointové odhady.

1 Stav tejto verzie

Táto verzia má zámerne úzky účel. Zaznamenáva, čo ostáva po odstránení neplatného dôkazového kroku zo staršej Robinovej–Mertensovej línie. Má sa čítať ako opravený výskumný program, nie ako finálny dôkaz.

Dôležité sú tieto rozlíšenia.

- Logaritmickej mostík ostáva samostatným pomocným výsledkom. Jeho úlohou je zdôvodniť použitie $P(N) < \log N$ pre najmenší hypotetický Robinov protipríklad $N > 5040$.
- Predchádzajúca Mertensova kompenzačná vetva je stiahnutá ako dôkaz finálneho Robinovho kroku.
- Predchádzajúci konsolidovaný rukopis je nahradený ako dôkazový text, pretože zdedil rovnakú medzeru v $B(n)$ -obálke.
- Tento rukopis ponecháva iba opravené ledger identity a explicitne formuluje zostávajúce analytické ciele.

Pre orientáciu: opravený materiál je nižšie zapísaný ako samostatný rukopis. Najprv uvádzame presný Robinov ledger a izolujeme, prečo predchádzajúce odčítanie cez B_J -obálku nebolo certifikované. Potom línia I zavádza endpointovo normalizovanú chybu W a podpísané Chebyshevovo/MVDC centrum. Línia II sa tomuto oscilujúcemu centru vyhýba a prepisuje beta blok ako prvomomentový recipročný prvočíselný certifikát. Posledná časť explicitne formuluje zostávajúce analytické ciele.

2 Presný Robinov ledger

Nech

$$\beta(x) = \prod_{p \leq x} \frac{p}{p-1}, \quad E(x) = \log \beta(x) - \gamma - \log \log x.$$

Pre extrémálne kandidátske profily používané nižšie je podpora plná až po $x = P(n)$:

$$n = \prod_{p \leq x} p^{a_p}, \quad a_p \geq 1.$$

Pre úplne ľubovoľné celé číslo možno namiesto toho položiť $a_p = 0$ pre chýbajúce prvočísla a ponechať rovnaký súčin cez všetky $p \leq x$. V prípade plnej podpory platí

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \beta(x) \prod_{p \leq x} \left(1 - p^{-(a_p+1)}\right).$$

Definujme skutočný multiplikatívny deficit

$$A(n) := - \sum_{p \leq x} \log \left(1 - p^{-(a_p+1)}\right),$$

a logaritmickú rezervu

$$B_{\log}(n) := \log \frac{\log \log n}{\log x}.$$

Potom

$$\log \frac{\sigma(n)}{n} = \gamma + \log \log x + E(x) - A(n).$$

Robinova nerovnosť pre n teda plynie z presnej brány

$$E(x) \leq A(n) + B_{\log}(n). \tag{1}$$

Odvodenie brány

Pre prvočíselnú mocninu platí

$$\frac{\sigma(p^a)}{p^a} = 1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a} = \frac{1 - p^{-(a+1)}}{1 - p^{-1}} = \frac{p}{p-1} \left(1 - p^{-(a+1)}\right).$$

Vynásobením cez všetky prvočísla v plnej podpore dostaneme súčin vyššie. Podľa definície

$$\log \beta(x) = \gamma + \log \log x + E(x), \quad \sum_{p \leq x} \log \left(1 - p^{-(a_p+1)}\right) = -A(n).$$

Teda

$$\log \frac{\sigma(n)}{n} = \gamma + \log \log x + E(x) - A(n).$$

Na druhej strane

$$\log(e^\gamma \log \log n) = \gamma + \log \log x + \log \frac{\log \log n}{\log x} = \gamma + \log \log x + B_{\log}(n).$$

Preto nerovnosť

$$\log \frac{\sigma(n)}{n} \leq \log(e^\gamma \log \log n)$$

plynie presne z (1).

Konvencia pre kandidátov a rezervy

Nižšie CA profil znamená štandardný extrémalný kandidátsky profil po redukcii Robina a Alaoglu–Erdosa na rekordné profily deliteľskej sumy. Tento rukopis túto redukcii znovu nedokazuje; používa ju na pomenovanie kandidátskeho profilu, na ktorom sa testuje zostávajúci ledger. Pre taký profil s najväčším prvočísлом x píšme príslušné číslo ako

$$n_{\text{CA}}(x) = \prod_{p \leq x} p^{a_p(x)}, \quad a_p(x) \geq 1.$$

CA deficit a surová logaritmická rezerva sú

$$A_{\text{CA}}(x) := A(n_{\text{CA}}(x)), \quad B_{\log, \text{CA}}(x) := \log \frac{\log \log n_{\text{CA}}(x)}{\log x}.$$

Surová CA rezerva oproti beta chybe $E(x)$ je teda

$$R_{\text{CA}}^E(x) := A_{\text{CA}}(x) + B_{\log, \text{CA}}(x).$$

Pojem CA podporný blok znamená interval $(x_{i-1}, x_i]$ medzi dvoma po sebe nasledujúcimi vzorkovanými CA podpornými endpointmi. V dôkazovom ledgeri možno $R_{\text{CA}}^E(x_i)$ nahradiť ľubovoľnou certifikovanou dolnou hranicou.

3 Prečo bol predchádzajúci krok cez $B(n)$ -obálku neplatný

Stiahnutá línia zaviedla zníženú modelovú obálku tvaru

$$B_J(n) = \beta(x) \prod_{p \in J_1(n)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

a pokúsila sa použiť rozdiel $\beta(x) - B_J(n)$ na kompenzáciu kladného prebytku v explicitnej Mer-tensovej hornej hranici pre $\beta(x)$. Tu $J_1(n)$ označuje zvolený jednotkovo-exponentový prvočíselný chvost v tejto stiahnutej konštrukcii.

Algebraické odčítanie je bezpečné iba vtedy, ak je $B_J(n)$ stále certifikovanou hornou obálkou:

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - p^{-(a_p+1)}\right) \leq \prod_{p \in J_1(n)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \quad (2)$$

Bez (2) môže zvolený abstraktný chvost stlačiť $B_J(n)$ pod skutočnú hodnotu $\sigma(n)/n$. Vtedy rozdiel $\beta(x) - B_J(n)$ nie je dostupnou dôkazovou rezervou.

Opravená línia preto musí používať buď skutočný deficit CA-profilu, alebo samostatnú certifikovanú obálku dokázanú nad $\sigma(n)/n$.

4 Línia I: podpísané Chebyshevovo/MVDC centrum

Prvá aktívna línia zachováva kompenzáciu v beta chybe namiesto toho, aby ju rozdelila na hrubé kladné endpointové odhady. Nech

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad r(x) = \theta(x) - x.$$

Definujme endpointovo normalizovanú beta chybu

$$W(x) := E(x) - \frac{r(x)}{x \log x}.$$

Pre ten istý CA profil píšme

$$H_{\text{CA}}(x) := \log n_{\text{CA}}(x) - \theta(x).$$

Položme tiež

$$\mathcal{B}_2(x) := B_{\log, \text{CA}}(x) - \frac{r(x) + H_{\text{CA}}(x)}{x \log x}.$$

Potom presný CA ledger gap

$$G_{\text{CA}}(x) := A_{\text{CA}}(x) + B_{\log, \text{CA}}(x) - E(x)$$

možno prepísať ako

$$G_{\text{CA}}(x) = A_{\text{CA}}(x) + \frac{H_{\text{CA}}(x)}{x \log x} + \mathcal{B}_2(x) - W(x). \quad (3)$$

Naozaj,

$$B_{\log, \text{CA}}(x) = \frac{r(x) + H_{\text{CA}}(x)}{x \log x} + \mathcal{B}_2(x), \quad E(x) = \frac{r(x)}{x \log x} + W(x),$$

takže endpointový člen $r(x)/(x \log x)$ sa presne vykrátí. Preto opravená beta strana propaguje $W(x)$, nie surové $E(x)$. Endpointovo opravená CA rezerva porovnávaná s $W(x)$ je preto

$$R_{\text{CA}}^W(x) := A_{\text{CA}}(x) + \frac{H_{\text{CA}}(x)}{x \log x} + \mathcal{B}_2(x).$$

Podmienka $W(x) \leq R_{\text{CA}}^W(x)$ je presne CA verzia brány (1), zapísaná po endpointovom vykrátení.

Pre $2 < Y < x$ definujme renormalizovaný beta blok

$$Q(Y, x) = \sum_{Y < p \leq x} -\log(1 - 1/p) - \log \frac{\log x}{\log Y}.$$

Potom

$$E(x) = E(Y) + Q(Y, x).$$

Ak

$$\rho(x) = \frac{\theta(x) - x}{x \log x}, \quad W(x) = E(x) - \rho(x),$$

dostaneme propagovaný W -blok

$$W(x) = W(Y) + \tilde{Q}(Y, x), \quad \tilde{Q}(Y, x) := Q(Y, x) - (\rho(x) - \rho(Y)).$$

Na bloku $2 < Y < x$ položme

$$\omega(t) = \frac{\log t + 1}{t^2 (\log t)^2}.$$

Opravená bloková identita vznikne rozkladom $-\log(1-1/p) = 1/p + \sum_{m \geq 2} 1/(mp^m)$ a parciálnou sumáciou prvého rádu; má podpísaný tvar

$$\tilde{Q}(Y, x) = \int_Y^x (\theta(t) - t) \omega(t) dt + \mathcal{T}_2(Y, x), \quad (4)$$

kde

$$\mathcal{T}_2(Y, x) := \sum_{Y < p \leq x} \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^m}$$

je explicitne ohraničený druhorádový chvost produktu. Pre úplnosť, prvý rád sa počíta takto. Kedže

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t \log t} \right) = -\omega(t),$$

parciálna sumácia dáva

$$\sum_{Y < p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\theta(x)}{x \log x} - \frac{\theta(Y)}{Y \log Y} + \int_Y^x \theta(t) \omega(t) dt.$$

Po odčítaní $\log(\log x / \log Y)$ a endpointovej korekcie $\rho(x) - \rho(Y)$ zostane presne

$$\int_Y^x (\theta(t) - t) \omega(t) dt,$$

pretože

$$\int_Y^x t \omega(t) dt = \log \frac{\log x}{\log Y} - \frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log Y}.$$

Prirodzené MVDC centrum tohto podpísaného bloku je

$$K(Y, x) = \frac{-\int_Y^x (\theta(t) - t) \omega(t) dt}{\int_Y^x \sqrt{t} \omega(t) dt}. \quad (5)$$

Skutočne, ak

$$W_0(Y, x) := \int_Y^x \sqrt{t} \omega(t) dt,$$

potom (5) je presne normalizácia

$$\int_Y^x (\theta(t) - t) \omega(t) dt = -K(Y, x) W_0(Y, x),$$

takže

$$\tilde{Q}(Y, x) = -K(Y, x) W_0(Y, x) + \mathcal{T}_2(Y, x).$$

Dôkazová povinnosť sa tým mení na jednostrannú dolnú hranicu pre podpísané centrum $K(Y, x)$, nie na hrubý absolútny odhad pre $|\theta(t) - t|$. Pre CA podporný blok $x_{i-1} < x_i$ nech U_{i-1}^W je certifikovaná horná hranica pre $W(x_{i-1})$ a R_i^W certifikovaná dolná hranica pre $R_{CA}^W(x_i)$. Po vložení blokovej identity dostaneme

$$W(x_i) \leq U_{i-1}^W - K(x_{i-1}, x_i) W_0(x_{i-1}, x_i) + \mathcal{T}_2(x_{i-1}, x_i).$$

Preto $W(x_i) \leq R_i^W$ plynie z

$$K(x_{i-1}, x_i) \geq K_i^{\text{req}} := \frac{U_{i-1}^W + \mathcal{T}_2(x_{i-1}, x_i) - R_i^W}{W_0(x_{i-1}, x_i)}.$$

Chýbajúca veta v tejto línii je:

Analytický cieľ 1 (Podpísané Chebyshevovo/MVDC centrum). *Dokázať pre všetky dostatočne veľké CA podporné bloky*

$$K(x_{i-1}, x_i) \geq K_i^{\text{req}}.$$

Konečný rozsah pod prvým asymptotickým blokom sa má certifikovať výpočtom.

Táto línia je numericky silná, pretože zachováva znamienko a kompenzáciu beta chyby. Jej prekážka je však jasná: dôkaz vyžaduje jednostrannú vetu pre podpísaný vážený priemer $t - \theta(t)$, ekvivalentne pre záporný vážený priemer $\theta(t) - t$. Štandardné absolútne odhady pre $|\theta(t) - t|$ túto líniu neuzatvárajú, pretože ničia znamienko.

5 Lína II: prvomomentový recipročný certifikát

Druhá aktívna línia sa vyhýba Chebyshevovej oscilácii a pracuje priamo s prvým MVDC momentom beta bloku. Pre $2 < Y < x$ definujeme

$$Q(Y, x) = \sum_{Y < p \leq x} -\log(1 - 1/p) - \log \frac{\log x}{\log Y}.$$

Položme

$$\nu = \pi(x) - \pi(Y), \quad H = \log \frac{\log x}{\log Y}, \quad \mu = \frac{H}{\nu},$$

a

$$u_p = e^{-\mu} \frac{p}{p-1} - 1.$$

Táto voľba rovnomerne odoberá hlavný blokový člen, pretože $H = \mu\nu$. Pre každé prvočíslo v bloku platí

$$\log(1 + u_p) = \log \left(e^{-\mu} \frac{p}{p-1} \right) = -\mu - \log(1 - 1/p).$$

Sčítaním cez ν prvočísiel dostaneme

$$\sum_{Y < p \leq x} \log(1 + u_p) = \sum_{Y < p \leq x} -\log(1 - 1/p) - \mu\nu = Q(Y, x).$$

Keďže $1 + u_p > 0$ a $\log(1 + u_p) \leq u_p$, dostaneme

$$Q(Y, x) = \sum_{Y < p \leq x} \log(1 + u_p) \leq M_1(Y, x) := \sum_{Y < p \leq x} u_p.$$

Ak

$$S_{-1}(Y, x) := \sum_{Y < p \leq x} \frac{1}{p-1},$$

tak prvý moment má presný tvar

$$M_1(Y, x) = e^{-\mu}(\nu + S_{-1}(Y, x)) - \nu. \quad (6)$$

Tento tvar plynie z identity

$$u_p = (e^{-\mu} - 1) + \frac{e^{-\mu}}{p-1}.$$

Nech U_i je kumulatívny horný ledger pre $E(x_i)$ a R_i je certifikovaná dolná hranica pre surovú CA rezervu $R_{CA}^E(x_i)$. Línia sa uzavrie, ak

$$U_i \leq R_i.$$

Ekvivalentne, na bloku $(x_{i-1}, x_i]$ položme

$$\nu_i = \pi(x_i) - \pi(x_{i-1}), \quad H_i = \log \frac{\log x_i}{\log x_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{H_i}{\nu_i}.$$

Stačí dokázať:

Analytický cieľ 2 (Prvomomentový S_{-1} certifikát).

$$S_{-1}(x_{i-1}, x_i) \leq \nu_i(e^{\mu_i} - 1) + e^{\mu_i}(R_i - U_{i-1}).$$

Ekvivalencia je iba algebra. Keďže

$$E(x_i) = E(x_{i-1}) + Q(x_{i-1}, x_i) \leq U_{i-1} + M_1(x_{i-1}, x_i),$$

stačí dokázať

$$M_1(x_{i-1}, x_i) \leq R_i - U_{i-1}.$$

Po dosadení

$$M_1 = e^{-\mu_i}(\nu_i + S_{-1}) - \nu_i$$

a vyriešení podľa S_{-1} dostaneme presne zobrazenú cieľovú nerovnosť.

Táto línia je algebraicky čistejšia než línia I, lebo v nej nevystupuje Chebyshevova oscilácia. Jej prekážkou je, že známe globálne endpointové odhady pre recipročné súčty prvočísel sú príliš hrubé, ak sa nezávisle dosadia v bodoch Y a x . Chýbajúcim vstupom musí byť ostrejší lokálny alebo kumulatívny odhad pre blokový súčet $S_{-1}(Y, x)$.

6 Čo aktuálne poskytuje MVDC

Samostatné MVDC práce [6, 7] ukazujú, že rozklad podľa centra je veľmi účinný pre hladké produkty a pre numerické korekcie Eulerových produktov. V prvočíselnom Eulerovom produkte však MVDC centrum a vyššie momenty stále obsahujú súčty cez prvočísla. Preto MVDC zatiaľ samo o sebe neposkytuje uzavretý analytický dôkaz.

V tomto Robinovom programe treba MVDC chápať ako mechanizmus, ktorý určuje správne centrované objekty:

$$K(Y, x) \quad \text{v línii I,} \quad M_1(Y, x) \quad \text{v línii II.}$$

Zostávajúcou matematickou prácou je dokázať jeden z príslušných jednostranných analytických cieľov.

7 Numerická evidencia a jej úloha

Numerické audity v repozitári kontrolujú algebraické účtovníctvo a mierku oboch cieľov. Nena-
hrádzajú chýbajúcu analytickú vetu. Pomocné skripty a generované auditné tabuľky sú udržiava-
vané vo verejnom podpornom repozitári [5].

	blok	K_i	K_i^{req}	rezerva
	3 329 267 → 6 382 007	1.089125	0.143480	+0.945645
	6 382 007 → 12 253 883	1.082018	0.135441	+0.946577
	12 253 883 → 29 093 377	1.065904	0.392437	+0.673467
	29 093 377 → 56 048 351	1.040017	0.108140	+0.931877

	blok	$M_1(Y, x)$	$U(x) - E(x)$	$R(x) - U(x)$
	3 329 267 → 6 382 007	$-2.899 \cdot 10^{-5}$	$1.70 \cdot 10^{-10}$	$2.001 \cdot 10^{-5}$
	6 382 007 → 12 253 883	$-2.389 \cdot 10^{-6}$	$2.67 \cdot 10^{-10}$	$1.387 \cdot 10^{-5}$
	12 253 883 → 29 093 377	$-8.065 \cdot 10^{-6}$	$2.88 \cdot 10^{-10}$	$8.561 \cdot 10^{-6}$
	29 093 377 → 56 048 351	$-3.795 \cdot 10^{-6}$	$1.84 \cdot 10^{-10}$	$5.837 \cdot 10^{-6}$
	56 048 351 → 99 999 989	$-1.186 \cdot 10^{-6}$	$4.53 \cdot 10^{-10}$	$4.317 \cdot 10^{-6}$

Prvá tabuľka podporuje líniu I. Druhá podporuje líniu II. V oboch prípadoch je chýbajúci krok analytický, nie numerický.

8 Záver

Predchádzajúce finálne dôkazové tvrdenie je stiahnuté. Opravený stav je:

logaritmický mostík ostáva pomocný,
predchádzajúca kompenzačná vetva a konsolidovaný dôkaz sú nahradené.

Robinov–MVDC program má teraz dva explicitné analytické ciele:

$$K_i \geq K_i^{\text{req}} \quad \text{alebo} \quad S_{-1}(x_{i-1}, x_i) \leq \nu_i(e^{\mu_i} - 1) + e^{\mu_i}(R_i - U_{i-1}).$$

Dokázanie jedného z týchto cieľov v požadovanom nekonečnom CA rozsahu by znovu otvorilo Robinovu cestu. Kým taká veta nie je dokázaná, program ostáva otvoreným výskumným smerom, nie hotovým dôkazom Robinovej nerovnosti ani Riemannovej hypotézy.

Literatúra

- [1] G. Robin, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothese de Riemann, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 63 (1984), 187–213.
- [2] L. Alaoglu and P. Erdos, On highly composite and similar numbers, *Transactions of the American Mathematical Society*, 56 (1944), 448–469.
- [3] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois Journal of Mathematics*, 6 (1962), 64–94.
- [4] P. Dusart, Estimates of some functions over primes without R.H., arXiv:1002.0442 (2010).
- [5] R. Polak, Riemann-hypothesis: auxiliary scripts and numerical audit data for the Robin–MVDC programme, GitHub repository, 2026, <https://github.com/robopol/Riemann-hypothesis>.
- [6] R. Polak, Central (C-)Bernoulli Numbers Arising from the MVDC Method, Zenodo, 2025, doi: 10.5281/zenodo.15856214, <https://zenodo.org/records/15856214>.
- [7] R. Polak, Moment–Centred Decomposition (MVDC): Central Bernoulli Numbers and High–Precision Euler–Product Corrections, Zenodo, 2025, doi: 10.5281/zenodo.15856085, <https://zenodo.org/records/15856085>.